Bab 8

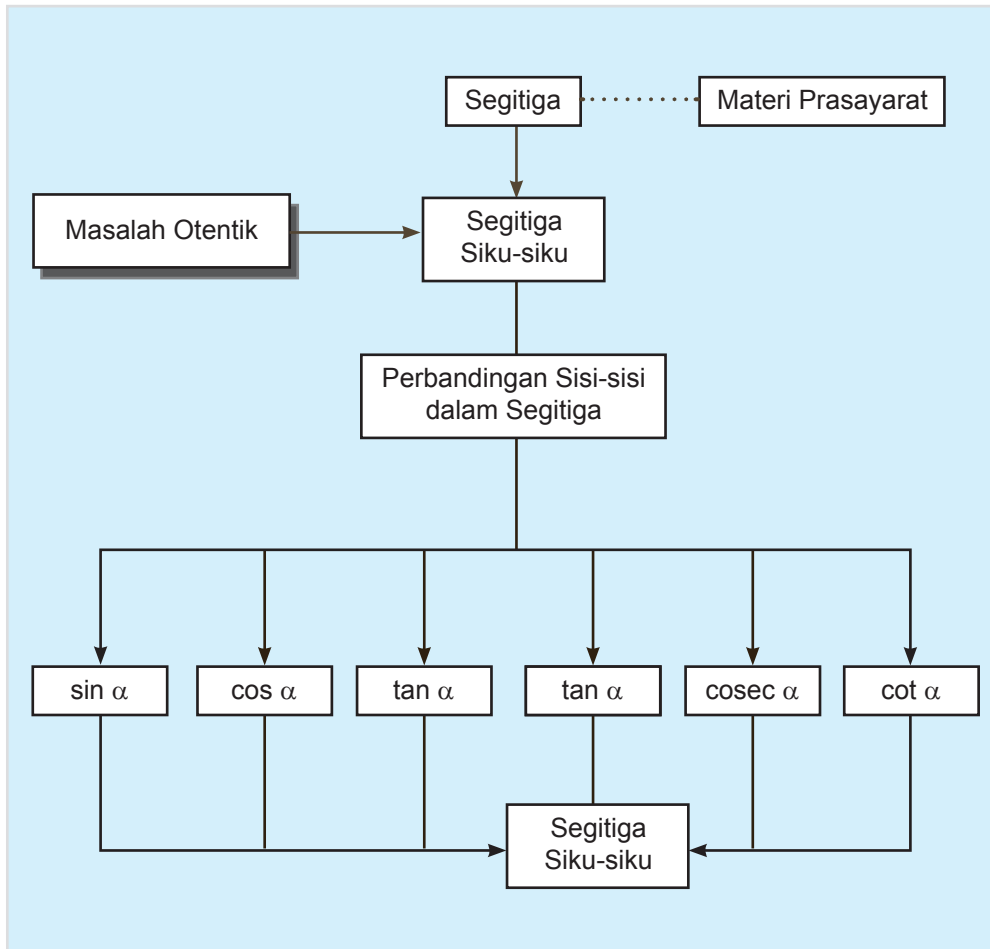
Trigonometri

A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

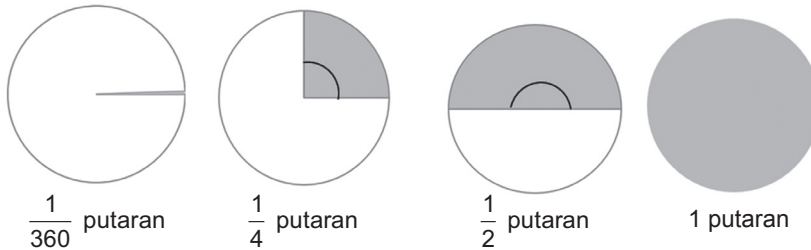
Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
Setelah mengikuti pembelajaran ini siswa mampu: 1. menghayati pola hidup disiplin, kritis, bertanggungjawab, konsisten dan jujur serta menerapkannya dalam kehidupan sehari-hari; 2. menghayati kesadaran hak dan kewajiban serta toleransi terhadap berbagai perbedaan di dalam masyarakat majemuk sebagai gambaran menerapkan nilai-nilai matematis; 3. menghayati rasa percaya diri, motivasi internal dan sikap peduli lingkungan melalui kegiatan kemanusiaan dan bisnis dan dalam kehidupan sehari-hari; 4. memahami konsep perbandingan trigonometri pada segitiga siku-siku melalui penyelidikan dan diskusi tentang hubungan perbandingan sisi-sisi yang bersesuaian dalam beberapa segitiga siku-siku sebangun; 5. menemukan sifat-sifat dan hubungan antar perbandingan trigonometri dalam segitiga siku-siku; 6. memahami dan menentukan hubungan perbandingan trigonometri dari sudut di setiap kuadran, memilih dan menerapkan dalam penyelesaian masalah nyata dan matematika. 7. memahami konsep fungsi Trigonometri dan menganalisis grafik fungsinya serta menentukan hubungan nilai fungsi Trigonometri sudut-sudut istimewa.	Melalui pembelajaran materi trigonometri, siswa memperoleh pengalaman belajar: • menemukan konsep perbandingan trigonometri melalui pemecahan masalah otentik; • berkolaborasi memecahkan masalah aktual dengan pola interaksi sosial kultur; • berpikir tingkat tinggi (berpikir kritis dan kreatif) dalam menyelidiki dan mengaplikasikan konsep trigonometri dalam memecahkan masalah otentik.

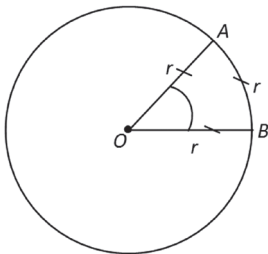
Istilah Penting

- *Sudut*
- *Derajat*
- *Radian*
- *Kuadran*
- *Perbandingan Sudut (Sinus,Cosinus, tangen, cotangen, cosecan, dan secan)*
- *Identitas trigonometri*

B. PETA KONSEP

C. MATERI PEMBELAJARAN

1. Ukuran Sudut (Derajat dan Radian)

Pada umumnya, ada dua ukuran yang digunakan untuk menentukan besar suatu sudut, yaitu derajat dan radian. Tanda "^{O}" dan "*rad*" berturut-turut menyatakan simbol derajat dan radian. Singkatnya, putaran penuh = 360^{O}, atau 1^{O} didefenisikan sebagai besarnya sudut yang dibentuk oleh $\frac{1}{360}$ kali putaran penuh. Cermati gambar berikut ini!

Gambar 8.1 Deskripsi besar rotasi

Tentunya, dari Gambar 8.1, kamu dapat mendeskripsikan untuk beberapa satuan putaran yang lain. Sebelum kita memahami hubungan "derajat dengan radian", mari kita pelajari teori mengenai radian.

Gambar 8.2 Ukuran radian

Satu radian diartikan sebagai ukuran sudut pusat α yang panjang busurnya sama dengan jari-jari, perhatikan Gambar 8.2.

Jika besar $\angle AOB = \alpha$, $\overline{AB} = OA = OB$, maka $\alpha = \frac{\overline{AB}}{r} = 1$ radian.

Jika panjang busur tidak sama dengan r, maka cara menentukan besar sudut ter-sebut dalam satuan radian diselesaikan menggunakan rumus perbandingan:

Definisi 8.1

$$\angle AOB = \frac{\overline{AB}}{r} rad$$

Lebih lanjut, hubungan satuan derajat dengan satuan radian, bahwa 1 putaran penuh sama dengan 2π *rad*. Seperti dinyatakan dalam definisi berikut

Definisi 8.2

$$360^{O} = 2\pi \text{ } rad \text{ atau } 1^{O} = \frac{\pi}{180} \text{ } rad \text{ atau } 1 \text{ } rad = 57{,}3^{O}$$

Perhatikan hubungan secara aljabar antara derajat dengan radian berikut ini.

Definisi 8.3

1. $\frac{1}{4}$ putaran $= \frac{1}{4} \times 360^{\circ} = 90^{\circ} \Leftrightarrow 90^{\circ} = 90 \times \frac{\pi}{180}\,rad = \frac{1}{2}\pi\,rad.$
2. $\frac{1}{3}$ putaran $= \frac{1}{3} \times 360^{\circ} = 120^{\circ} \Leftrightarrow 120^{\circ} = 120 \times \frac{\pi}{180}\,rad = \frac{2}{3}\pi\,rad.$
3. $\frac{1}{2}$ putaran $= \frac{1}{2} \times 360^{\circ} = 180^{\circ} \Leftrightarrow 180^{\circ} = 180 \times \frac{\pi}{180}\,rad = \pi\,rad.$
4. $\frac{2}{3}$ putaran $= \frac{2}{3} \times 360^{\circ} = 240^{\circ} \Leftrightarrow 240^{\circ} = 240 \times \frac{\pi}{180}\,rad = \frac{4}{3}\pi\,rad.$
5. $\frac{3}{4}$ putaran $= \frac{3}{4} \times 360^{\circ} = 270^{\circ} \Leftrightarrow 270^{\circ} = 270 \times \frac{\pi}{180}\,rad = \frac{3}{2}\pi\,rad.$

Tentunya dengan mudah kalian mampu mengkorvesikan ukuran sudut yang lain. Pahami contoh berikut ini.

Contoh 8.1

Perhatikan jenis ukuran sudut berikut ini.

1. $\frac{1}{5}\pi$ rad = ... putaran = ...°
2 $\frac{1}{6}$ putaran = ... *rad* = ...°
3. 135° = ... *rad* = ... putaran
4. Sudut yang dibentuk jarum jam, saat pukul 11.55, sama dengan berapa radian?.
5. Jika suatu alat pemancar berputar 60 putaran dalam setiap menit, berapa besar putaran dalam derajat per detik? Berapa putaran dalam radian per detik?

Penyelesaian

1. 1 putaran = 360° = 2π *rad*. Jadi, $\frac{1}{2}$ putaran = π *rad*. Oleh karena itu, $\frac{1}{5}\pi\,rad = \frac{1}{5} \times \frac{1}{2}$ putaran $= \frac{1}{10}$ putaran $= \frac{1}{10} \times 360^{\circ} = 36^{\circ}$.

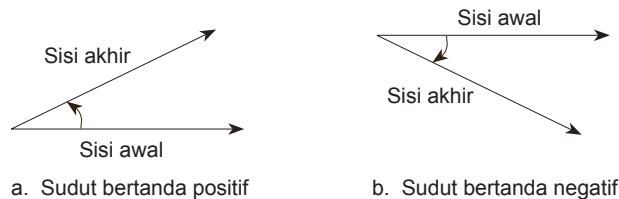
2. Karena 1 putaran = 2π *rad*, $\frac{1}{6}$ putaran $= \frac{1}{6} \times (2\pi \text{ rad}) = \frac{1}{3}\pi\,rad = \frac{1}{3}\pi \times \frac{180^{\circ}}{\pi} = 60^{\circ}$.

3. $135° = 135° \times \frac{\pi}{180}\ rad = \frac{3}{4}\pi\ rad = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2}$ putaran $= \frac{3}{8}$ putaran.

4. Sudut yang terbentuk pada pukul 11.55 adalah 30°, $30° = 30° \times \frac{\pi}{180}\ rad = \frac{1}{6}\pi\ rad$.

5. Jika setiap menit, alat tersebut melakukan rotasi sebanyak 60 putaran, artinya dalam 1 detik. Pemancar berputar sebanyak 1 putaran. Karena 1 putaran penuh = 360°, jadi pemacar tersebut berputar sebesar 360°/detik. Selanjutnya, 360° = 2π *rad*, artinya pemancar tersebut berputar sebesar 2π *rad*/detik.

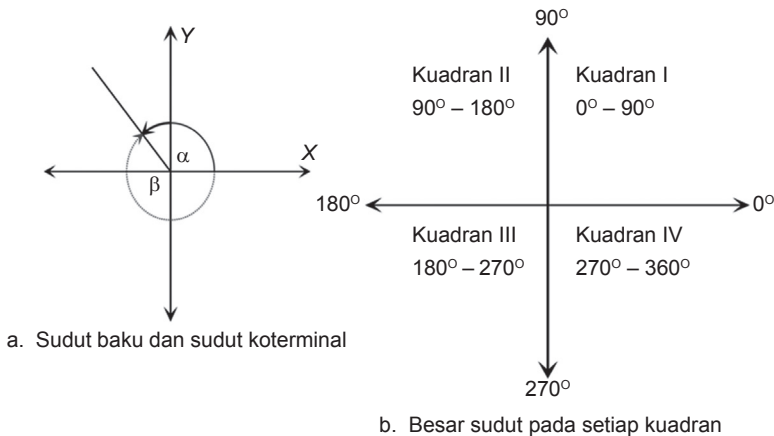
360° pertama sekali diperkenalkan oleh bangsa Babilonia.
Hitungan satu tahun pada kalender Babilonia, yaitu sebanyak 365 hari.

Dalam kajian geometris, sudut didefinisikan sebagai hasil rotasi dari sisi awal (*initial side*) ke sisi akhir (*terminal side*). Selain itu, arah putaran memiliki makna dalam sudut. Suatu sudut bertanda *"positif"* jika arah putarannya berlawanan dengan arah putaran jarum jam, dan bertanda *"negatif"* jika arah putarannya searah dengan jarum jam. Arah putaran sudut juga dapat diperhatikan pada posisi sisi akhir terhadap sisi awal. Untuk memudahkannya, mari kita cermati deskripsi berikut ini.

Gambar 8.3 Sudut berdasarkan arah putaran

Dalam koordinat kartesius, jika sisi awal berimpit dengan sumbu x dan sisi terminal terletak pada salah satu kuadran pada koordinat kartesius, disebut sudut *standar* (baku). Jika sisi akhir berada pada salah satu sumbu pada koordinat tersebut, sudut yang seperti ini disebut pembatas kuadran, yaitu 0°, 90°, 180°, 270° dan 360°.

Sebagai catatan, bahwa untuk menyatakan suatu sudut, lazimnya menggunakan huruf Yunani, seperti, α (*alpha*), β (*betha*), γ (*gamma*), dan θ (*tetha*), dan juga menggunakan huruf-huruf kapital, seperti A, B, C, dan D. Selain itu, jika sudut yang dihasilkan sebesar α, maka sudut β disebut sebagai sudut koterminal, seperti yang dideskripsikan pada gambar di bawah ini.

a. Sudut baku dan sudut koterminal

b. Besar sudut pada setiap kuadran

Gambar 8.4 Sudut secara geometri dan pembatas kuadran

Definisi 8.4

Sudut-sudut koterminal adalah dua sudut ditempatkan pada posisi standar, memiliki sisi-sisi akhir (*terminal side*) yang berimpit.

Untuk memantapkan pemahaman akan sudut baku dan pembatas kuadran, cermati contoh dan pembahasan di bawah ini.

Contoh 8.2

Gambarkanlah sudut-sudut baku di bawah ini, dan tentukan posisi setiap sudut pada koordinat kartesius.

a) 60° b) –45° c) 120° d) 600°

Penyelesaian

a)

Sisi awal terletak pada sumbu *X* dan sisi terminal *OA* terletak di kuadran I.

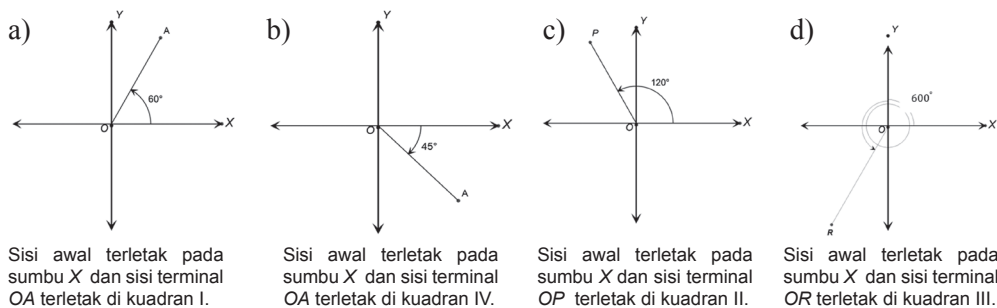
b)

Sisi awal terletak pada sumbu *X* dan sisi terminal *OA* terletak di kuadran IV.

c)

Sisi awal terletak pada sumbu *X* dan sisi terminal *OP* terletak di kuadran II.

d)

Sisi awal terletak pada sumbu *X* dan sisi terminal *OR* terletak di kuadran III.

Gambar 8.5 Sudut pada setiap kuadran

Uji Kompetensi 8.1

1. Untuk setiap besar sudut di bawah ini, ubahlah ke bentuk satuan derajat dan radian.
   a. $\frac{1}{6}$ putaran
   b. $\frac{2}{5}$ putaran
   c. $\frac{3}{10}$ putaran
2. Besar sudut dalam satuan derajat berikut ini, tentukan posisi setiap sudut tersebut.
   a. 90°
   b. 135°
   c. 225°
   d. 300°
   e. –270°
   f. 1200°

   Selanjutnya, nyatakan setiap sudut di atas, dalam satuan radian.
3. Misalkan, sudut θ merupakan sudut lancip dan sudut β adalah sudut tumpul. Perhatikan kombinasi setiap sudut dan kedua sudut tersebut, dan tentukanlah posisinya.
   a. 3θ
   b. 2β
   c. $\theta + \beta$
   d. $2\beta - \theta$
4. Tentukanlah sudut komplemen dan suplemen setiap sudut di bawah ini.
   a. 15°
   b. 105°
   c. 68°
   d. 96°
5. Jika kita perhatikan jam, berapa kali kah dalam 1 hari terbentuk sudut-sudut di bawah ini.
   a. 90°
   b. 180°
   c. 30°
   d. 120°
6. Ubahlah sudut-sudut berikut ke bentuk derajat.
   a. $\frac{\pi}{12}$
   b. $\frac{5\pi}{7}$
   c. $\frac{3\pi}{5}$
   d. $\frac{7\pi}{8}$
   e. $\frac{7\pi}{16}$
   f. $\frac{8\pi}{15}$
7. Ubahlah sudut-sudut berikut ke bentuk radian.
   a. 45°
   b. 36°
   c. 87.4°
   d. 0,54°

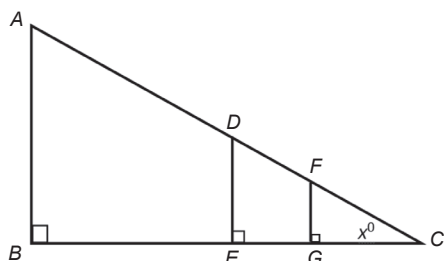
Projek

Himpun berbagai informasi penerapan sudut pada bidang fisika dan masalah nyata. Coba rancang pemecahan masalah terkait informasi yang kamu peroleh. Buatlah laporanmu dan sajikan di depan kelas.

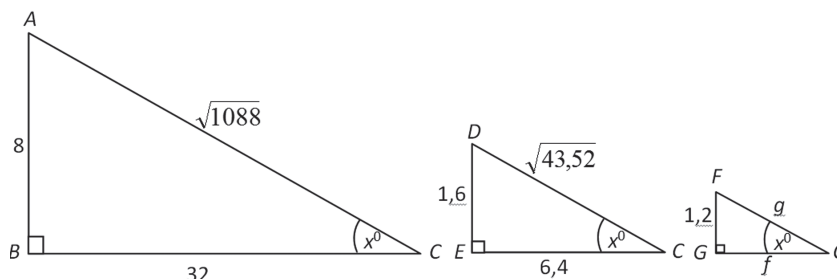
2. Konsep Dasar Sudut

Coba kita pahami deskripsi berikut.

Pak Yahya adalah seorang penjaga sekolah. Tinggi pak Yahya adalah 1,6 m. Dia mempunyai seorang anak, namanya Dani. Dani masih kelas II Sekolah Dasar. Tinggi badannya 1,2 m. Dani adalah anak yang baik dan suka bertanya. Dia pernah bertanya kepada ayahnya tentang tinggi tiang bendera di lapangan itu. Dengan senyum, Ayahnya menjawab 8 m. Suatu sore, disaat dia menemani ayahnya membersihkan rumput liar di lapangan, Dani melihat bayangan setiap benda ditanah. Dia mengambil tali meteran dan mengukur panjang bayangan ayahnya dan panjang bayangan tiang bendera, yaitu 6,4 m dan 32 m. Tetapi dia tidak dapat mengukur panjang bayangannya sendiri karena bayangannya mengikuti pergerakannya. *Jika anda sebagai Dani, dapatkah anda mengukur bayangan anda sendiri?*

Konsep kesebangunan pada segitiga terdapat pada cerita tersebut. Mari kita gambarkan segitiga sesuai cerita di atas.

Gambar 8.6 Model tiang bendera dan orang

Dimana:
AB = tinggi tiang bendera (8 m)
BC = panjang bayangan tiang (32 m)
DE = tinggi pak Yahya (1,6 m)
EC = panjang bayangan pak Yahya (6,4 m)
FG = tinggi Dani (1,2 m)
FC = panjang bayangan Dani

Berdasarkan gambar segitiga di atas terdapat tiga buah segitiga, yaitu ΔABC, ΔDEC, dan ΔFGC sebagai berikut.

Gambar 8.7 Kesebangunan

Karena ΔABC, ΔDEC, dan ΔFGC adalah sebangun maka berlaku

$$\frac{FG}{DE} = \frac{GC}{EC} = \frac{1,2}{1,6} = \frac{f}{6,4} \Rightarrow \text{Diperoleh } f = 4,8$$

Dengan menggunakan teorema Phytagoras diperoleh nilai dari $FC = g = \sqrt{24,48}$.
Berdasarkan ΔABC, ΔDEC, dan ΔFGC diperoleh perbandingan sebagai berikut.

a. $\dfrac{FG}{FC} = \dfrac{DE}{DC} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{1,2}{\sqrt{24,48}} = \dfrac{1,6}{\sqrt{43,52}} = \dfrac{8}{\sqrt{1088}} = \dfrac{\text{sisi di depan sudut}}{\text{sisi miring segitiga}} = 0,24$

Perbandingan ini disebut dengan sinus sudut C, ditulis sin x^0 = 0,24

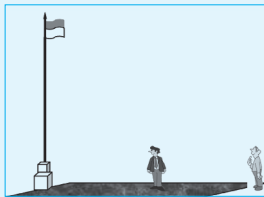
b. $\dfrac{GC}{FC} = \dfrac{EC}{DC} = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{4,8}{\sqrt{24,48}} = \dfrac{6,4}{\sqrt{43,52}} = \dfrac{32}{\sqrt{1088}} = \dfrac{\text{sisi di samping sudut}}{\text{sisi miring segitiga}} = 0,97$

Perbandingan ini disebut dengan cosinus sudut C, ditulis cos x^0 = 0,97

c. $\dfrac{FG}{GC} = \dfrac{DE}{EC} = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{1,2}{4,8} = \dfrac{1,6}{6,4} = \dfrac{8}{32} = \dfrac{\text{sisi di depan sudut}}{\text{sisi di samping sudut}} = 0,25$

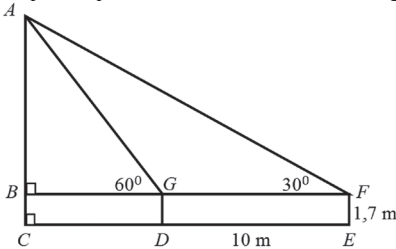
Perbandingan ini disebut dengan tangen sudut C, ditulis tan x^0 = 0,25

Dari ketiga segitiga tersebut, terdapat perbandingan yang sama. Perhatikan perbandingan berikut.

Masalah-8.1

Gambar 8.8 Tiang Bendera

Dua orang guru dengan tinggi badan yang sama yaitu 170 cm sedang berdiri memandang puncak tiang bendera di sekolahnya. Guru pertama berdiri tepat 10 m di depan guru kedua. Jika sudut elevasi guru pertama 60^0 dan guru kedua 30^0 maka dapatkah anda menghitung tinggi tiang bendera tersebut?

Memahami dan Merencanakan Pemecahan Masalah

Misalkan tempat berdiri tegak tiang bendera, dan kedua guru tersebut adalah titik. Ujung puncak tiang bendera dan kepala kedua guru juga diwakili oleh titik, maka dapat diperoleh Gambar 8.9 sebagai berikut.

Gambar 8.9 Model masalah tiang bendera

Dimana:
AC = tinggi tiang bendera
DG = tinggi guru pertama
EF = tinggi guru kedua
DE = jarak kedua guru

Alternatif Penyelesaian

Berdasarkan pengalaman kita di awal pembicaraan di atas maka kita memiliki perbandingan, sebagai berikut:

$\tan 60° = \frac{AB}{BG} \quad \Leftrightarrow \quad BG = \frac{AB}{\tan 60°}$ t

$\tan 30° = \frac{AB}{BF} = \frac{AB}{10 + BG} \quad \Leftrightarrow \quad AB = (10 + BG) \times \tan 30°$

$\Leftrightarrow \quad AB = \left(10 + \frac{AB}{\tan 60°}\right) \times \tan 30°$

$\Leftrightarrow \quad AB \times \tan 60° = (10 \times \tan 60° + AB) \times \tan 30°$
(kedua ruas kali tan 50°)

$\Leftrightarrow \quad AB \times \tan 60° = 10 \times \tan 60° \times \tan 30° + AB \times \tan 30°$

$\Leftrightarrow \quad AB \times \tan 60° - AB \times \tan 30° = 10 \times \tan 60° \times \tan 30°$

$\Leftrightarrow \quad AB \times (\tan 60° - \tan 30°) = 10 \times \tan 60° \times \tan 30°$

$\Leftrightarrow \quad AB = \frac{10 \times \tan 60° \times \tan 30°}{\tan 60° - \tan 30°}$

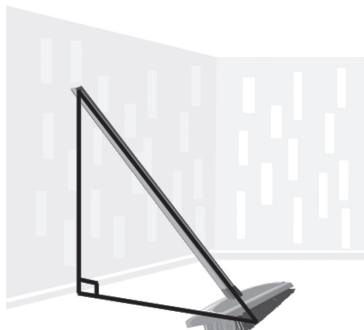
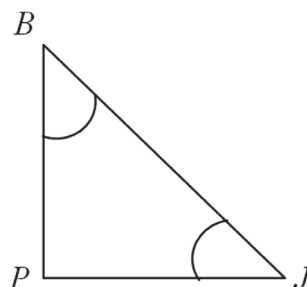
Jadi, tinggi tiang bendera adalah:

$AC = AB + BC$ atau $AC = \frac{10 \times \tan 60° \times \tan 30°}{\tan 60° - \tan 30°} + 1{,}7$ m.

Gambar 8.10 Rumah Adat Suku Dayak

Pada peradaban kehidupan budaya Dayak, kajian mengenai trigonometri sudah tercermin dari berbagai ikon kehidupan mereka. Misalnya, para arsitekturnya, sudah menerapkan kesetimbangan bangunan pada rumah adat yang mereka ciptakan. Rumah adat tersebut berdiri kokoh sebagai hasil hubungan yang tepat antara besar sudut yang dikaitkan dengan panjang sisi-sisinya. Apakah para Arsitektur tersebut mempelajari trigonometri juga?

3. Perbandingan Trigonometri Pada Segitiga Siku-Siku

Pada subbab ini, akan dipahami konsep perbandingan trigonometri pada suatu segitiga siku-siku. Dalam kehidupan sehari-hari sering kita jumpai bentuk segitiga siku-siku, misalnya, meletakkan posisi sapu. Perhatikan Gambar 8.11 berikut.

Gambar 8.11 Posisi Sapu di dinding

Gambar 8.12 Segitiga *PBJ*

Dari Gambar 8.11, dapat dicermati bahwa dinding dengan lantai saling tegak lurus membentuk sudut siku-siku dan sapu membentuk sisi miring. Ilustrasinya disajikan pada Gambar 8.12. Dari Gambar 8.12, dapat disebut sisi-sisi segitiga siku-siku berturut-turut, yaitu *PB*, *PJ*, dan *JB*, dan ketiga sudutnya, berturut-turut yaitu, *J*, *B*, dan *P* adalah sudut siku-siku.

Sudut yang menjadi perhatian adalah sudut lancip pada segitiga siku-siku tersebut, yaitu $\angle J$ dan $\angle B$. Adapun hubungan perbandingan antara sudut lancip dan sisi-sisi segitiga siku-siku *BPJ* di atas.

Definisi 8.5

1. *Sinus suatu sudut* didefinisikan sebagai perbandingan panjang sisi di depan sudut dengan sisi miring, ditulis $sin\ J = \frac{PB}{BJ}$.
2. *Cosinus suatu sudut* didefinisikan sebagai perbandingan panjang sisi di samping sudut dengan sisi miring cosinus *J*, ditulis $cos\ J = \frac{PJ}{BJ}$.
3. *Tangen suatu sudut* didefinisikan sebagai perbandingan panjang sisi di depan sudut dengan sisi di samping sudut, tangen *J*, ditulis $tan\ J = \frac{PB}{PJ}$.
4. *Cosecan suatu sudut* didefinisikan sebagai panjang sisi miring dengan sisi di depan sudut, cosecan *J*, ditulis $cosec\ J = \frac{BJ}{PB}$, atau $cosec\ J = \frac{1}{Sin\ J}$.
5. *Secan suatu sudut* didefinisikan sebagai perbandingan panjang sisi miring dengan sisi di samping sudut, secan *J*, ditulis $sec\ J = \frac{BJ}{PJ}$, atau $sec\ J = \frac{1}{Cos\ J}$.

1

6. *Cotangen suatu sudut* didefinisikan sebagai perbandingan sisi di samping sudut dengan sisi di depan sudut, cotangen J, ditulis *cotan* $J = \frac{PJ}{PB}$ atau *cotan* $J = \frac{1}{Tan\ J}$.

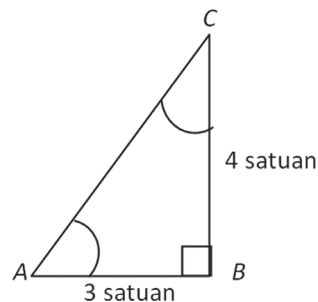
Jika diperhatikan aturan perbandingan di atas, konsep matematika lain yang perlu diingat kembali adalah teorema Phytagoras. Selain itu, pengenalan akan sisi miring, sisi di samping sudut, dan sisi di depan sudut tentunya dapat mudah diperhatikan. *Nah*, karena yang telah didefinisikan perbadingan sudut untuk sudut lancip J, silahkan rumuskan ke enam jenis perbandingan sudut untuk sudut B. Untuk lebih paham dengan konsep di atas, mari kita pelajari contoh-contoh berikut ini.

Contoh 8.3

Diberikan segitiga siku-siku ABC, siku-siku di $\angle ABC$. Jika Panjang sisi AB = 3 *satuan*, $BC = 4$ *satuan*. Tentukanlah *sin A*, *cos C*, dan tan A.

Penyelesaian

Untuk segitiga di samping, dengan Teorema Phytagoras diperoleh panjang sisi AC = 5 *satuan*. Selanjutnya, dengan menggunakan *Definisi 8.5*. Bagian 1, 2, dan 3, maka berlaku:

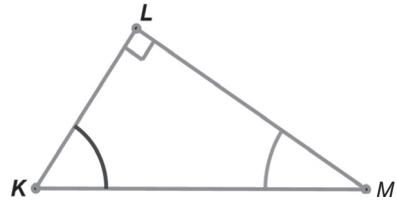
- $\sin A = \frac{\text{Panjang sisi di depan sudut } A}{\text{Panjang sisi miring}} = \frac{4}{5}$.
- $\cos A = \frac{\text{Panjang sisi di samping sudut } A}{\text{Panjang sisi miring}} = \frac{3}{5}$.
- $\tan A = \frac{\text{Panjang sisi di depan sudut } A}{\text{Panjang sisi di samping sudut } A} = \frac{4}{3}$.

Gambar 8.13 Segitiga siku-siku

Perlu diketahui, bahwa yang disebut sisi pada suatu segitiga siku-siku tidak selalu miring, tetapi sisi miring selalu dihadapan sudut siku-siku.

Contoh 8.4

Perhatikan segitiga siku-siku di samping ini.

Diketahui $\tan M = \frac{8}{15}$,

tentukanlah sin M dan cos M!

Gambar 8.14 Segitiga siku-siku *KLM*

Penyelesaian

Untuk menjawab contoh ini, kita mulai dari $\tan M = \frac{8}{15}$. Artinya, menurut Definisi 8.6, bahwa

$$\tan M = \frac{\text{Panjang sisi di depan sudut } M}{\text{Panjang sisi di samping sudut } M} = \frac{KL}{LM} = \frac{8}{15}$$

Jadi, panjang sisi $KL = 8$, dan $LM = 15$.
dengan Teorema Phytagoras, diperoleh $KM = 17$,
untuk menentukan nilai sin M dan cos K, menurut Definisi 8.5 diperoleh:

- $\sin M = \frac{\text{Panjang sisi di depan sudut } M}{\text{Panjang sisi miring}} = \frac{KL}{LM} = \frac{8}{17}$ dan
- $\cos M = \frac{\text{Panjang sisi di samping sudut } M}{\text{Panjang sisi miring}} = \frac{LM}{KM} = \frac{15}{17}$.

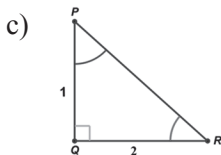
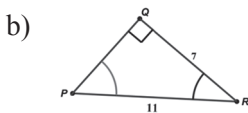
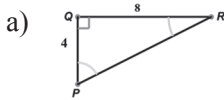
Dari kedua contoh di atas, dapat dipelajari berbagai kombinasi persoalan mengenai nilai perbandingan trigonometri pada suatu segitiga siku-siku.

Uji Kompetensi 8.2

1. Tentukanlah nilai sinus, kosinus, dan tangen untuk sudut P dan R pada setiap segitiga siku-siku di bawah ini. Nyatakanlah jawaban Anda dalam bentuk paling sederhana.

   a)

   b)

   c)

2. Diketahui suatu segitiga siku-siku, dengan nilai sinus salah satu sudut lancipnya adalah $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Tentukanlah nilai cosinus, tangen sudut tersebut.

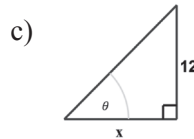
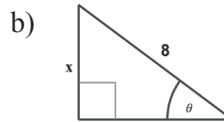
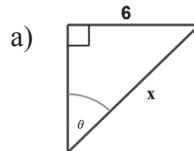
3. Pada sebuah segitiga KLM, dengan siku-siku di L, berlaku $\sin M = \frac{2}{3}$ dan panjang sisi $KL = \sqrt{10}$ cm, tentukanlah panjang sisi segitiga yang lain.

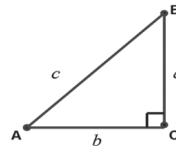
4. Luas segitiga siku-siku RST, dengan sisi tegak RS adalah 20 cm^2. Tentukanlah nilai sinus, cosinus, dan tangen untuk sudut lancip T.

5. Di bawah ini diberikan tiga segitiga siku-siku, diketahui $\sin\ \theta = \frac{2}{5}$. Tentukanlah nilai x.

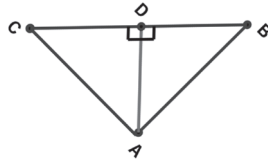
   a)

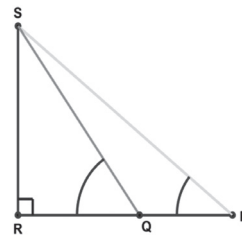
   b)

   c)

6. Pada segitiga XYZ dengan siku-siku di Y, $\cos\ Z = \frac{20}{24}$, tentukan nilai $\tan X$ dan $\tan Z$.

7. Perhatikan segitiga siku-siku di bawah ini.

   Tunjukkan bahwa:
   a) $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$
   b. $\tan B = \frac{\sin B}{\cos B}$
   c) $\operatorname{cosec}^2 A - \operatorname{cotan}^2 A = 1$

8. Dalam segitiga siku-siku ABC, diketahui panjang $BC = a$ dan $\angle ABC = .$

Tentukanlah panjang garis tinggi *AD*.

9. Diketahui $\sin x + \cos x = 3$ dan $\tan x = 1$, tentukanlah nilai $\sin x$ dan $\cos x$!

10. Diketahui segitiga *PRS*, seperti gambar di samping, siku-siku di *R*. Panjang $PQ = 1$, $\angle RQS = \alpha$ dan $\angle RPS = \gamma$. Tentukanlah panjang sisi *RS*!

Projek

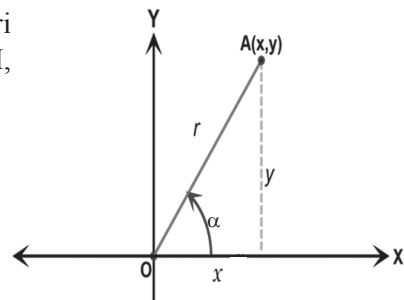
Rancanglah masalah nyata minimal tiga buah terkait penerapan perbandingan nilai sisi segitiga dan terkait trigonometri di bidang teknik bangunan dan bidang matematika. Selesaikanlah masalah tersebut dan buat laporannya serta sajikan di depan kelas.

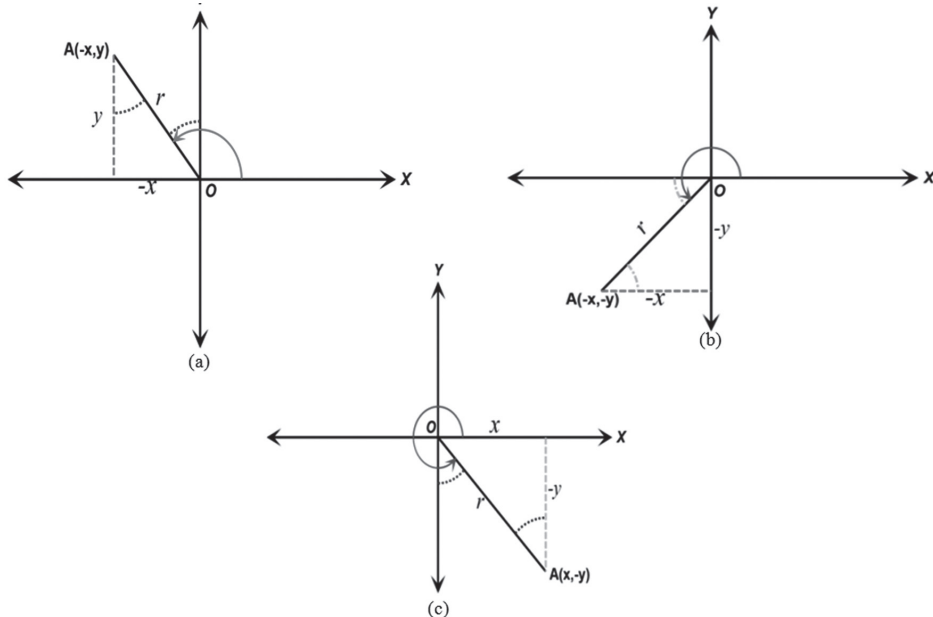
4. Nilai Perbandingan Trigonometri Sudut Istimewa

Awal subbab ini, akan dikaji nilai sinus, cosinus, tangen dan kebalikannya untuk domain sudut dalam satuan derajat atau radian. Selain itu, nilai semua perbandingan tersebut juga akan kita pelajari pada setiap kuadran dalam koordinat Kartesius. Mari kita pahami melalui pembahasan berikut ini.

Misalkan titik $A\ (x, y)$, panjang $OA = r$ dan sudut $AOX = \alpha$.

Mari kita perhatikan gambar di samping, dari segitiga siku-siku yang terdapat di kuadran I, berlaku :

- $\sin \alpha = \dfrac{y}{r}$.
- $\cos \alpha = \dfrac{x}{r}$.
- $\tan \alpha = \dfrac{y}{x}$.

Gambar 8.15 Segitiga siku-siku *AOX* yang berada di kuadran I

Dengan mempertimbangkan semua kombinasi koordinat titik pada koordinat Kartesius, kita dapat telusuri perbedaan nilai tanda untuk ketiga perbandingan trigonometri yang utama.

Gambar 8.16 Kombinasi sudut pada koordinat Cartesius

Garis putus-putus pada gambar menyatakan proyeksi setiap sumbu, misalnya pada Gambar 8.16(a), garis putus-putus adalah proyeksi sumbu Y di kuadran II. Sedangkan garis putus-putus melengkung menyatakan besar sudut yang besarnya sama, misalnya, pada Gambar 8.16 (b), garis putus-putus melengkung menyatakan dua sudut yang besarnya sama.

Contoh 8.5

Misalkan diketahui titik-titik berikut ini:

1. A (–12,5) dan $\angle XOA = \alpha$.
2. B (15,–8) dan $\angle XOB = \theta$.

Tentukanlah nilai sin α dan tan α, serta cos θ dan tan θ!

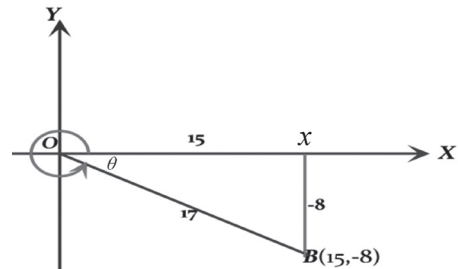
Penyelesaian

1. Dengan memperhatikan koordinat titik A (–12,5), sangat jelas bahwa titik tersebut terletak di kuadran kedua, karena $x = –12$, dan $y = 5$. Secara geometris, disajikan pada gambar berikut ini.

Karena $x = -12$, dan $y = 5$, dengan menggunakan teorema Phytagoras diperoleh sisi miring, $r = 13$. Oleh karena itu, diperoleh :

- $\sin \alpha = \frac{5}{13}$.
- $\tan \alpha = -\frac{5}{12}$.

Gambar 8.17 Titik *A* (–12,5) pada kuadran II

2. Titik B (15, –8), berada di kuadran IV, karena $x = 15$, dan $y = -8$.
   Untuk $x = 15$, $y = -8$, dengan menggunakan teorema Phytagoras diperoleh sisi miring, $r = 17$. Oleh karena itu, berlaku:
   - $\cos \theta = \frac{15}{17}$.
   - $\tan \theta = -\frac{8}{17}$.

Gambar 8.18 Titik *B* (15, –8) pada kuadran IV

Dari contoh di atas, dapat dipahami, ternyata nilai sudut perbandingan trigonometri, dapat bernilai positif juga negatif, tergantung pada letak koordinat titik yang diberikan. Selanjutnya, kebalikan dari kondisi pada contoh 5, dapat diperhatikan pada contoh berikut ini.

Contoh 8.6

Jika diketahui:

1. $\cos \theta = -\frac{4}{5}$, θ berada di kuadran II, tentukan nilai cosec θ dan cotan θ.
2. $\tan \beta = -\frac{6}{12}$, β berada di kuadran IV, tentukan nilai $\sin \beta$ dan $\cos \beta$.

Penyelesaian

1. Sudut θ yang terletak di kuadran II menjadi penentu tanda nilai perbandingan trigonometri.

   Dalam koordinat Cartesius, $\cos\theta = -\frac{4}{5}$, digambarkan sebagai berikut:

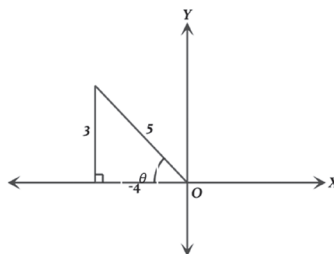
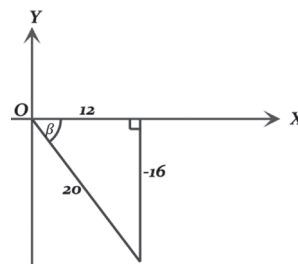
   Dari gambar di samping, mudah kita pahami bahwa:

Gambar 8.19 $\cos\theta = -\frac{4}{5}$

   - $\text{cosec}\ \theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{5}{3}$ θ
   - $\text{cotan}\ \theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{4}{3}$

2. Dengan pemahaman yang sama, dapat kita gambarkan $\tan\beta = -\frac{16}{12}$, dengan β di kuadran IV sebagai berikut:
   Dengan atribut segitiga siku-siku yang sudah lengkap, seperti pada gambar di samping, dengan mudah kita menentukan:

Gambar 8.20 $\tan\beta = -\frac{16}{12}$

   - $\sin\beta = -\frac{16}{20}$, dan
   - $\cos\beta = \frac{12}{20}$.

Tentunya, dengan pengetahuan dari Gambar 8.20 dan pengalaman pembahasan Contoh 8.5 dan 8.6 di atas, dapat kita merumuskan nilai perbandingan trigonometri di setiap kuadran, yaitu:

Di Kuadran I : $x > 0$, $y > 0$	Di Kuadran II : $x < 0$, $y > 0$
• $\sin\alpha = \frac{(+)y}{(+)r} = +\frac{y}{r}$	• $\sin\alpha = \frac{(+)y}{(+)r} = +\frac{y}{r}$
• $\cos\alpha = \frac{(+)x}{(+)r} = +\frac{x}{r}$	• $\cos\alpha = \frac{(-)x}{(+)r} = -\frac{x}{r}$
• $\tan\alpha = \frac{(+)y}{(+)x} = +\frac{y}{x}$	• $\tan\alpha = \frac{(+)y}{(-)x} = -\frac{y}{x}$

Di Kuadran III : $x < 0$, $y < 0$	Di Kuadran IV : $x > 0$, $y < 0$
• $\sin\alpha = \frac{(-)y}{(+)r} = -\frac{y}{r}$	• $\sin\alpha = \frac{(-)y}{(+)r} = -\frac{y}{r}$
• $\cos\alpha = \frac{(-)x}{(+)r} = -\frac{x}{r}$	• $\cos\alpha = \frac{(-)x}{(+)r} = -\frac{x}{r}$
• $\tan\alpha = \frac{(-)y}{(-)x} = +\frac{y}{x}$	• $\tan\alpha = \frac{(-)y}{(-)x} = +\frac{y}{x}$

Gambar 8. 21 Nilai tanda perbandingan trigonometri untuk setiap kuadran

Dalam kajian trigonometri ada istilah sudut istemewa, yang artinya sudut-sudut yang nilai perbandingan trigonometri dapat ditentukan secara eksak. Misalnya, 30°, 45°, 60°, dan 90° merupakan sudut istimewa di kuadran I. Selanjutnya (120°, 135°, 150°, 180°), (210°, 225°, 240°, 270°), dan (300°, 315°, 330°, 360°) berturut-turut adalah sudut-sudut istimewa di kuadran ke-II, ke-III, dan ke-IV. Pada beberapa referensi yang lain, sudut-sudut istimewa tersebut dinyatakan dalam satuan radian.

Pembahasan selanjutnya, yaitu, bagaimana nilai-nilai perbandingan trigonometri untuk setiap sudut istimewa. Pertama sekali, kita akan kaji nilai-nilai perbandingan tersebut di kuadran I.

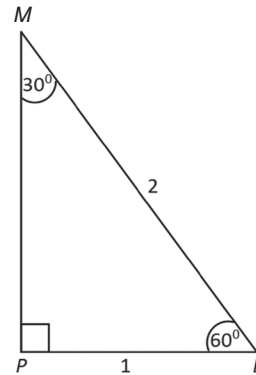
5. Perbandingan Trigonometri untuk Sudut 30°, 45° dan 60°

Mari perhatikan perbandingan sisi-sisi segitiga siku-siku istimewa. Segitiga tersebut adalah segitiga siku-siku yang mengandung sudut 30°,45°,dan 60°. Perhatikan gambar berikut.

Gambar 8.22 Segitiga siku-siku yang memuat sudut 30°,45°,dan 60°

Dari Gambar 8.22 (b), misalkan panjang sisi jika kita menentukan nilai perbandingan trigonometri untuk setiap sudut 30° dan 60°. Mari perhatikan segitiga *MPL* di bawah ini. Dengan teorema phytagoras, diperoleh panjang MP = $\sqrt{3}$. Oleh karena itu berlaku:

- $\sin 30° = \frac{1}{2}$
- $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

- $\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
- $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
- $\cos 60° = \frac{1}{2}$
- $\tan 60° = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

Gambar 8.23 Segitiga siku-siku *MPL*

Untuk menentukan nilai perbandingan trigonometri untuk sudut 45°, silahkan diskusikan dan kaji bersama teman-temanmu melalui gambar segitiga *ABC* pada Gambar 8.22(a). Untuk menentukan nilai perbandingan trigonometri pada saat 0° dan 90°, mari kita cermati gambar berikut ini.

Gambar 8.24 Perbandingan Trigonometri

Secara umum, dapat ditentukan nilai semua sudut istimewa, yaitu dengan cara menentukan setiap koordinat titik pada lingkaran dengan jari-jari 1.

Misalnya untuk titik *A* (0,1),

- sin 0° = 0
- cos 0° = 1
- tan 0° = 0

dan untuk menentukan nilai perbandingan sudut pada saat sudut 90°, digunakan titik B(1,0).

- sin 90° = 1
- cos 90° = 0
- tan 90° tak terdefinisi

Selengkapnya, nilai setiap perbandingan trigonometri pada setiap sudut istimewa 0°,30°,45°,60° dan 90°, di sajikan di Tabel 8.1 berikut.

Tabel 8.1 Nilai Perbandingan Trigonometri pada Kuadran Pertama

Sudut	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	tak terdefinisi

Sekarang, dengan menggunakan Gambar 8.21, dan Tabel 8.1, silahkan kamu diskusikan dengan temanmu untuk menentukan nilai perbandingan trigonometri pada sudut-sudut istimewa di kuadran I, II, III, dan IV.

Sebagai pedoman untuk memanstikan hasil kerjamu, secara lengkap di bawah ini disajikan nilai perbandingan trigonometri untuk semua sudut-sudut istimewa.

Tabel 8.2 Tabel lengkap Nilai perbandingan trigonometri pada kuadran I, II, III, dan IV

Sudut	Sin	Cos	Tan
0°	0	1	0
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
45°	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1
60°	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	1	0	tak terdefinisi
120°	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
135°	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-1
150°	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$

Sudut	Sin	Cos	Tan
180°	0	–1	0
210°	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
225°	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1
240°	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
270°	–1	0	tak terdefinisi
300°	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
315°	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	–1
330°	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$
360°	0	1	0

Masalah-8.2

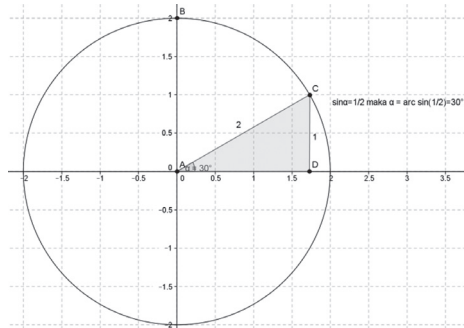
Seorang anak ingin menentukan besar sudut dari sebuah perbandingan trigonometri. Diberikan kepadanya perbandingan sebagai berikut.

$\sin \alpha = \frac{1}{2}$, tugasnya adalah menentukan nilai α (besar sudut)!

Alternatif Penyelesaian

Penyelesaian I:

Langkah-langkah yang dilakukannya adalah

1. Menggambarkan sebuah segitiga siku-siku dan menerapkan sifat perbandingan sinus. Adapun cara yang dilakukannya adalah menggambarkan sisi di hadapan sudut dengan panjang 1 satuan dan menggambarkan sisi miring sebuah segitiga dengan panjang 2.

2. Selanjutnya dia mengukur besar sudut dari segitiga siku-siku yang sudah terbentuk dengan menggunakan busur derajat.
3. Berdasarkan pengukuran yang dilakukan ternyata diperoleh besarnya sudut α adalah 30°.

Penyelesaian II:

1. Alternatif penyelesaian yang lain yaitu dengan menggunakan kalkulator. Dengan fasilitas yang dimiliki kalkulator dapat diperoleh invers nilai sin, yaitu
   $\alpha = \sin^{-1}\frac{1}{2} = 30°$.
2. Invers dari $\sin^{-1}\frac{1}{2}$ selanjutnya dituliskan dengan arcsin $\frac{1}{2}$.

Penyelesaian III:

1. Alternatif yang mungkin dilakukan adalah dengan melihat tabel. Untuk kasus nilai perbandingan trigonometri sudut istimewa pada kuadran I, kuadran II, kuadran, III, dan kuadran IV dapat menggunakan Tabel 8.2.

Latihan 8.1

1. Tentukan nilai β jika $\cos \beta = \frac{1}{2}$!
2. Tentukan nilai θ jika $\tan \theta = 0$!

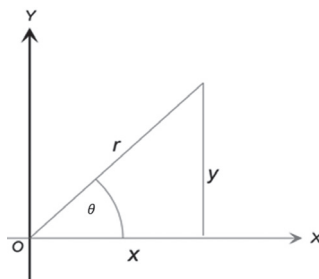
Penulisan ini juga berlaku untuk perbandingan trigonometri lainnya. Misalnya invers dari cos $x = y$ maka inversnya adalah $x = \arccos y$; invers dari tan $x = y$ maka inversnya adalah $x = \arctan y$.

Latihan 8.2

Jika $\tan x = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$, dan x tumpul berapakah nilai dari cos x?

Contoh 8.7

Perhatikan Gambar 8.25!
Tunjukkan bahwa

- $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$
- $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
- $\tan^2\theta + 1 = \text{cosec}^2\theta$

Gambar 8.25 Segitiga siku-siku

Penyelesaian

Dari Gambar 8.25 berlaku:

$$\sin\theta = \frac{y}{r},\quad \cos\theta = \frac{x}{r}.$$

Nilai perbandingan sin θ dan cos θ dinyatakan sebagai berikut.

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{y}{x}$$

sedangkan $\tan\theta = \frac{y}{x}$.

sehingga berlaku bahwa:

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{y}{x} = \tan\theta \Leftrightarrow \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$

Perlu kita kenalkan, bahwa (sin θ)(sin θ) = (sin $\theta)^2$ = $\sin^2\theta$; ($\sin^2\theta$ dibaca sinus kuadrat teta). Tetapi perlu diingat bahwa, $\sin^2\theta \neq \sin\theta^2$.

Tentunya, jika $\sin\theta = \frac{y}{r}$ maka $\sin^2\theta = (\sin\theta).(\sin\theta) = \left(\frac{y}{r}\right).\left(\frac{y}{r}\right) = \frac{y^2}{r^2}$.

Sama halnya untuk memahami $\cos^2\theta = \frac{x^2}{r^2}$, dan $\tan^2\theta = \frac{y^2}{x^2}$.

Jumlah dari sinus kuadrat teta dengan cosinus kuadrat teta dinyatakan sebagai berikut:

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = \frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} = \frac{y^2 + x^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1.$$

Jadi ditemukan:

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ .... (1)

Persamaan ini disebut sebagai persamaan identitas trigonometri.

Dari persamaan ini kita dapat menemukan turunan rumusan dalam trigonometri. Misalnya, jika kedua ruas persamaan tersebut dibagi $\cos^2\theta$, (dengan syarat $\cos^2\theta \neq 0$), maka persamaan (1) berubah menjadi:

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta} \Leftrightarrow \tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta \quad \text{.......................................} \quad (2)$$

Jika kita lanjutkan membagi kedua ruas persamaan (1) dengan $\sin^2\theta$, maka berlaku:

$$\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta} \Leftrightarrow 1 + \text{cotan}^2\theta = \text{cosec}^2\theta \quad \text{...................................} \quad (3)$$

Formula di atas berlaku, untuk semua satuan sudut yang sama. Misalnya, α = 15°, maka 2α = 30°.

Oleh karena itu berlaku:

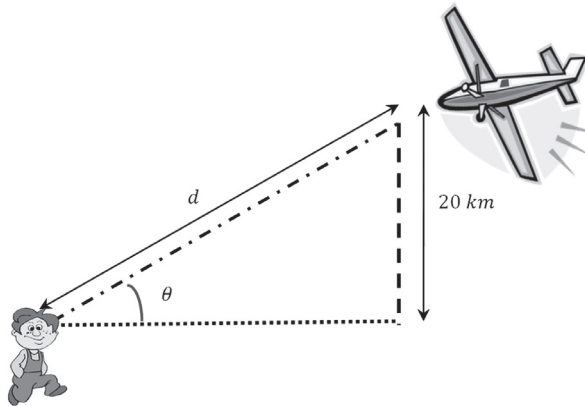
$$\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = \sin^2 30° + \cos^2 30° = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1.$$

Tolong ingat kembali bahwa, $\sin^2 30° = \frac{1}{4}$, tetapi $\sin (30°)^2 = \sin 900° = 0$, (sudahkah kamu tahu alasannya?).

Masalah-8.3

Di daerah pedesaan yang jauh dari Bandar udara, kebiasan anak-anak jika melihat/mendengar pesawat udara sedang melintasi perkampungan mereka. Bolang, mengamati sebuah pesawat udara, yang terbang dengan ketinggian 20 km. Dengan sudut elevasi pengamat (Bolang) terhadap pesawat adalah sebesar θ, tentukanlah jarak pengamat ke pesawat jika : $\theta = 30°$, $\theta = 90°$, dan $\theta = 120°$.

Alternatif Penyelesaian

Ilustrasi persoalan di atas dapat disajikan pada Gambar 8.26.

Gambar 8.26 Sketsa pengamatan terhadap pesawat udara dengan sudut elevasi *θ*.

Untuk menentukan jarak pengamat terhadap pesawat, dengan diketahui ketinggian terbang pesawat, kita menentukan sin θ, (kenapa?).

- Untuk $\theta = 30°$, maka $\sin 30° = \dfrac{20}{d} \Leftrightarrow d = \dfrac{20}{\sin 30°} = \dfrac{20}{1/2} = 40$ km.

- Untuk $\theta = 90°$, maka $\sin 90° = \dfrac{20}{d} \Leftrightarrow d = \dfrac{20}{\sin 90°} = \dfrac{20}{1} = 20$ km.

Artinya, dengan sudut elevasi 90°, maka pesawat tepat berada di atas si Bolang, sehingga sama dengan tinggi terbangnya pesawat.

- Untuk $\theta = 120°$, maka $\sin 120° = \dfrac{20}{d} \Leftrightarrow d = \dfrac{20}{\sin 120°} = \dfrac{20}{\sqrt{3}/2} = \dfrac{40}{3}\sqrt{3}$ km.

Dapatkah kamu ilustrasikan bagaimana posisi pengamatan si Bolang dengan besar sudut elevasi, $\theta = 120°$.

Masalah-8.4

Sebuah perusahaan memproduksi mainan. Produksi hasil penjualan bulanan (dalam satuan ribuan unit) selama 2 tahun diprediksi, sebagai berikut

$$S = 23{,}1 + 0{,}442t + 4{,}3\cos\left(\pi t/6\right)$$

dengan t = waktu (bulan)
$t = 1$ merepresentasikan hasil penjualan bulan Januari tahun 2010.
Tentukanlah prediksi penjualan pada bulan Pebruari 2010 dan bulan Juni 2011.

Alternatif Penyelesaian

Jika bulan Januari tahun 2010 menyatakan waktu $t = 1$, maka bulan Pebruari 2010 menyatakan waktu $t = 2$, dan bulan April 2011 menyatakan $t = 16$.

1. Prediksi penjualan mainan pada bulan Pebruari 2010, waktu $t = 2$ adalah:

$$S = 23{,}1 + 0{,}442.(2) + 4{,}3\cos\left(t\pi/6\right)$$

$$S = 23{,}1 + 0{,}884 + 4{,}3\cos(60°)$$

$$S = 23{,}984 + 4{,}3.\left(\frac{1}{2}\right) = 26{,}134$$

Jadi banyaknya mainan yang terjual pada bulan Pebruari 2010 adalah sebanyak 26.134 unit.

2. Prediksi penjualan mainan pada bulan April 2011, $t = 16$ adalah:

$$S = 23{,}1 + 0{,}442.(16) + 4{,}3\cos\left(16\pi/6\right)$$

$$S = 23{,}1 + 0{,}442.(16) + 4{,}3\cos(960°)$$

$$S = 30{,}172 + 4{,}3\cos(240°) \quad (\text{kenapa } \cos(960°) = \cos(240°)\,?)$$

$$S = 30{,}172 + 4{,}3.\left(-\frac{1}{2}\right) = 28{,}022$$

Karena jumlah penjualan dalam ribuan unit, maka prediksi penjualan pada bulan April 2011 adalah 28,022 unit.

6. Grafik Fungsi Trigonometri

a. Grafik Fungsi $y = \sin x, x \in [0°, 360°]$.

Dengan menggunakan nilai-nilai sudut yang telah diberikan di atas, mari kita selesaikan persamaan berikut ini.

Contoh 8.8

Tentukanlah nilai x yang memenuhi setiap persamaan di bawah ini:

a) $\sin x = \frac{1}{2}, x \in [0, 2\pi]$

b) $\sin x + \sqrt{2} = -\sin x, x \in [0, 2\pi]$

Penyelesaian

$x \in [0, 2\pi]$ merupakan domain untuk menyelesaikan persamaan pada bagian a).

a) $\sin x = \frac{1}{2}$, hanya berlaku untuk $x = 30°$ dan $x = 150°$, karena perbandingan trigonometri hanya bernilai positif di kuadran I dan II. Sedangkan untuk $x = 210°$ dan $x = 330°$, nilai $\sin x = -\frac{1}{2}$.

Pasangan nilai x dengan nilai perbandingan $\sin x$ merupakan suatu koordinat titik pada grafik fungsi sinus, yaitu koordinat:

$$\left(30°, \frac{1}{2}\right), \left(150°, \frac{1}{2}\right), \left(210°, -\frac{1}{2}\right), \left(240°, -\frac{1}{2}\right)$$

b) Persamaan $\sin x + \sqrt{2} = -\sin x \Leftrightarrow 2\sin x = -\sqrt{2}$ atau $\sin x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Jika kamu sudah menguasai Tabel 9.2, tentunya dengan mudah, kamu dapat menyebutkan bahwa nilai x yang memenuhi adalah $x = -225°$ dan $x = -315°$. Selain itu juga, kita harus menguasai bahwa nilai $\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ pada saat $x = 45°$ dan $x = 135°$.

Oleh karena itu, sekarang kita memiliki pasangan titik:

$$\left(45°, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right), \left(135°, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right), \left(225°, -\frac{1}{2}\sqrt{2}\right), \left(315°, -\frac{1}{2}\sqrt{2}\right).$$

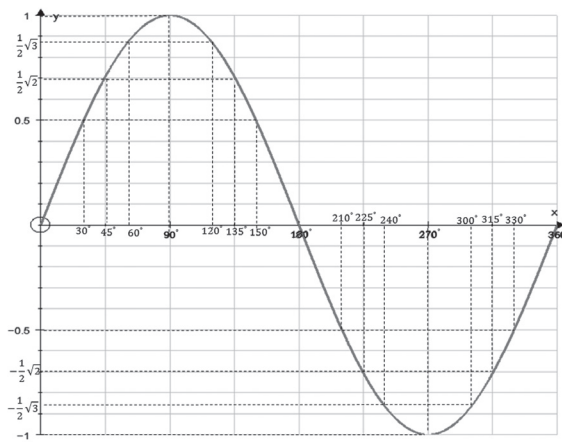
Selain pasangan titik besar sudut dan nilai perbandingan trigonometri di atas, tentunya, masih terdapat pasangan koordinat yang lain, yaitu:

- $\sin x = 0$, untuk $x = 180°$ dan $x = 360°$.
  Akibatnya diperoleh: (0°,0), (180°,0), (360°,0).

- $\sin x = 1$, untuk $x = 90°$ $\sin x = -1$, untuk $x = 270°$.
  Akibatnya berlaku: (90°,1), (270°,1).

  $\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, untuk $x = 60°$, dan $x = 120°$, serta $\sin x = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ pada saat $x = 240°$, dan $x = 300°$. Oleh karena itu berlaku:

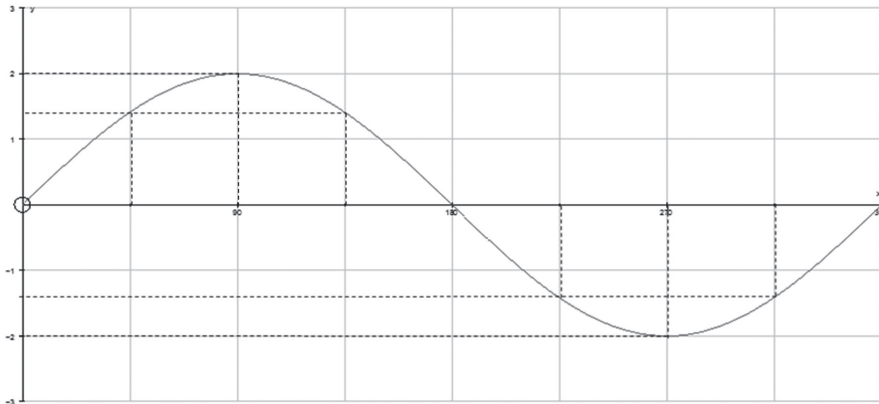
$$\left(60°, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right), \left(120° \frac{1}{2}\sqrt{3}\right), \left(240° - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right), \left(300° - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right).$$

Sebagai kumulatif hasil semua pasangan titik-titik di atas, kita sajikan pada Gambar 8.27.

Gambar 8.27 Grafik fungsi *y* = sin *x*, *x* ϵ [0°,360°]

Grafik $y = \sin x$ memiliki nilai $y_{max} = 1$ dan $y_{min} = -1$.

Secara manual, grafik di atas dapat kamu gambarkan pada kertas dengan spasi yang jelas.

- Jika fungsi $y = \sin x$, maka fungsi $y = \text{cosec } x$, untuk domain [0°,360°]. Silahkan temukan pasangan-pasangan titik untuk fungsi tersebut, kemudian sketsakan.

Berikut ini juga diberikan grafik fungsi sinus (Gambar 8.28), tetapi tentunya ada beberapa perbedaan yang anda harus cermati dan pahami. Nilai konstanta a yang memenuhi untuk fungsi di bawah ini adalah $a = 2$. Adanya konstanta, mengakibatkan perubahan pada nilai maksimum dan nilai minimum fungsi.

Gambar 8.28 Grafik fungsi $y = a \sin x$, $x \in [0°,360°]$, $a \in R$

Selanjutnya, akan kita bandingkan grafik fungsi di atas dengan grafik fungsi $y = \cos x$, $x \in [0°,360°]$.

b. Grafik Fungsi $y = \cos x$, $x \in [0°,360°]$

Mari cermati beberapa persamaan di bawah ini.

1) $(\cos x)^2 - 2.\cos x = -1$.
2) $\sqrt{8}.\cos x - 2 = 0$.

Penyelesaian

1) Persamaan $(\cos x)^2 - 2.\cos x = -1$ merupakan persamaan trigonomteri berbentuk persamaan kuadrat. Tentunya, untuk suatu persamaan kuadrat kita membutuhkan akar-akar persamaan kuadrat tersebut. Oleh karena itu dapat kita tulis:

$$(\cos x)^2 - 2.\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow (\cos x - 1).(\cos x - 1) = 0$$

atau $(\cos x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \cos x = 1$.
Nilai x yang memenuhi persamaan $\cos x = 1$ adalah $x = 0°$ dan $x = 360°$ (kembali sesuaikan dengan Tabel 9.2).
Nilai $\cos x = -1$ berlaku untuk $x = 180°$ dan $\cos x = 0$ untuk $x = 90°$ dan $x = 270°$.
Akibatnya, kita temukan pasangan titik:
$(0°,1)$, $(90°,0)$, $(180°,-1)$, $(270°,0)$ dan $(360°,1)$

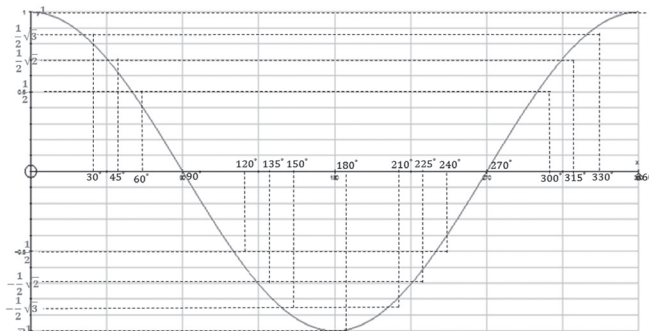
2) Persamaan $\sqrt{8}.\cos x - 2 = 0$ dapat kita sederhanakan menjadi:

$2\sqrt{2}.\cos x - 2 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$

Nilai x yang memenuhi persamaan $\cos x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ adalah untuk $x = 45°$ dan $x = 315°$ (lihat Tabel 9.2). Sedangkan untuk $\cos x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ berlaku untuk $x = 135°$ dan $x = 225°$. Oleh karena itu, kita dapat menuliskan pasangan titik-titik berikut:

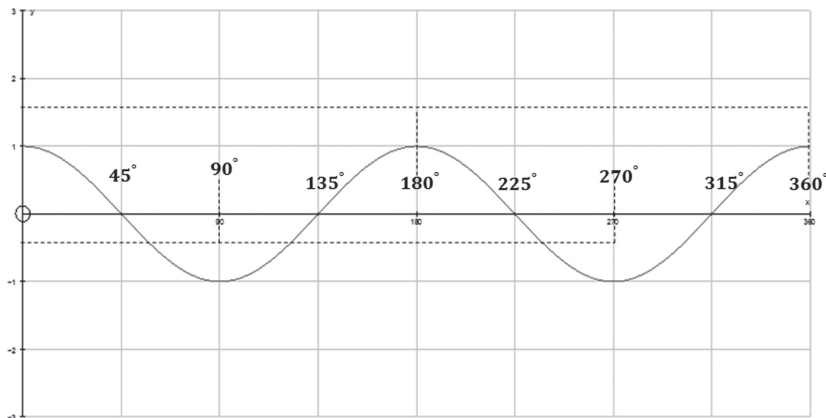
$$\left(45°, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right), \left(135° \frac{1}{2}\sqrt{2}\right), \left(225° - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right), \left(315° - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right).$$

- Selanjutnya, silahkan bentuk pasangan-pasangan titik yang lain, dapat kita lihat dari Tabel 8.2.

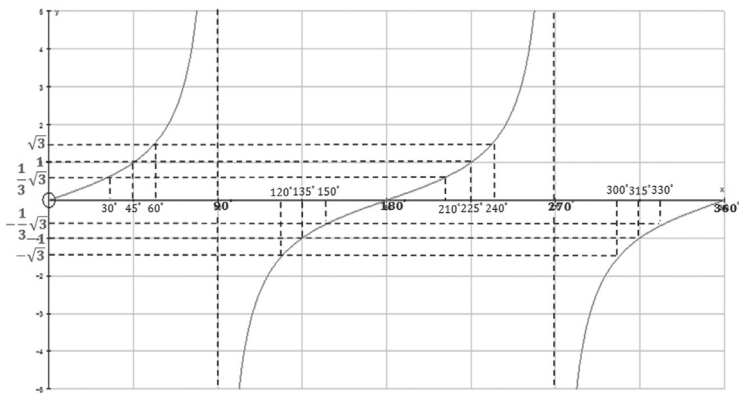
Jadi, dengan menggunakan semua pasangan-pasangan titik di atas, berikut ini disajikan pada grafik berikut.

Gambar 8.29 Grafik fungsi y = cos *x*, *x* ϵ [0°,360°]

Dari grafik di atas, dapat kita cermati bahwa seiring bertambahnya domain fungsi $y = \cos x$, kurva bergerak dari $y = 1$ hingga mencapai kembali $y = 1$. Nilai maksimum fungsi $y = \cos x$ memiliki nilai $y_{maks} = 1$ dan nilai $y_{min} = -1$.

- Tentukanlah pasangan titik-titik yang dilalui grafik fungsi $y = \sec x$, untuk x [0,360°]. Kemudian sajikan pasangan titik-titik tersebut dalam grafik fungsi trigonometri.

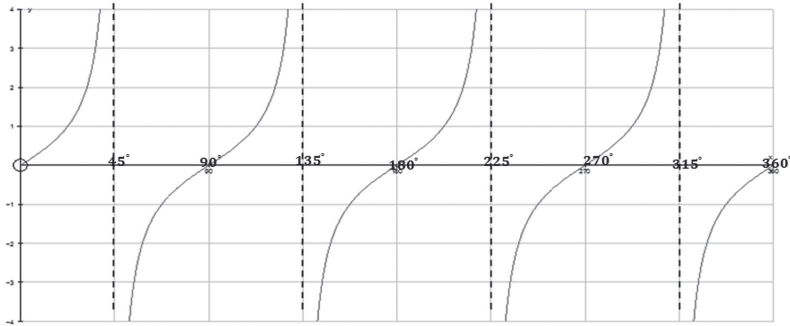
Gambar 8.30 di bawah ini adalah grafik $y = \cos bx$, $x \in [0°,360°]$, $b \in R$. Cermati dan tentukan perbedaan dengan grafik $y = \cos x$.

Gambar 8.30 Grafik fungsi $y = \cos bx$, $x \in [0°,360°]$, $b \in R$

c. Grafik Fungsi $y = \tan x, x \in [0°,360°]$.

Dengan cara yang sama, menggambarkan grafik fungsi $y = \sin x$ dan $y = \cos x$, grafik fungsi $y = \tan x$, untuk $x \in [0°,360°]$ dapat kita gambarkan sebagai berikut.

Gambar 8.31 Grafik fungsi $y = \tan x$, $x \in [0°,360°]$

Grafik di atas, berbeda dengan grafik $y = \sin x$ dan $y = \cos x$. Khususnya, mengenai nilai maksimum dan nilai minimum fungsi. Perhatikan nilai fungsi disaat $x \to 90°$ dan $x \to 270°$ (dari kanan), nilai $y = \tan x$ menuju tak terhingga. Sebaliknya, untuk $x \to 90°$ dan $x \to 270°$ (dari kiri), nilai $y = \tan x$ menuju negatif tak terhingga.

- Dengan keadaan ini, apa yang dapat kalian simpulkan dari gambar di atas?

Selanjutnya, cermati grafik di bawah.

Gambar 8.32 Grafik fungsi $y = \tan ax$, $x \in [0°,360°]$, dan $a \in R$

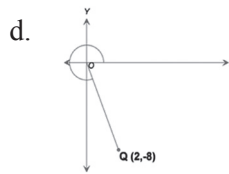
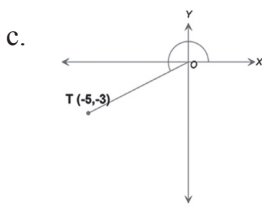
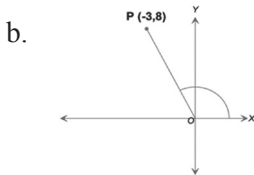
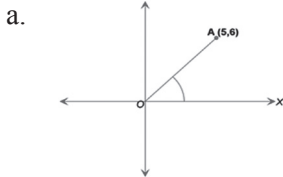
Uji Kompetensi 8.3

1. Perhatikan setiap gambar di bawah ini, tentukanlah nilai sinus, cosinus, tangen, secan, cosec, dan cotangen setiap sudut yang dinyatakan.

   a.

   b.

   c.

   d.

2. Tentukanlah nilai sinus, cosinus, tangen untuk setiap titik yang disajikan berikut:
   a. $P(5,12)$
   b. $Q(-5.2,7.2)$
   c. $R(-5,-2)$
   d. $T(3.5,-7.75)$

3. Periksalah kebenaran setiap pernyataan berikut. Berikan alasanmu.
   a. sec x dan sin x selalu mimiliki nilai tanda yang sama di keempat kuadran.
   b. Di kuadran I, nilai sinus selalu lebih besar daripada nilai cosinus.

c. Untuk $30° < x < 90°$, dan $120° < y < 150°$, maka nilai $2.\sin x < \cos 2y$

4. Di bawah ini disajikan tabel yang menjelaskan tanda nilai beberapa perbandingan trigonometri.

$\sin \alpha > 0$	$\cos \alpha > 0$
$\sin \alpha < 0$	$\cos \alpha < 0$
$\tan \alpha < 0$	$\sin \alpha > 0$

Tentukanlah letak sudut α untuk setiap kondisi tanda nilai perbandingan.

5 Diberikan $\tan \alpha = -\dfrac{8}{15}$ dengan $\sin \alpha > 0$, tentukanlah:

a. $\cos \alpha$

b. $\sec \alpha$

c. $(\sin \alpha).(\cos \alpha)$

d. $\dfrac{\operatorname{cosec} \alpha}{\operatorname{cotan} \alpha}$

6. Diketahui $\pi/2 \le \beta \le 3\pi/2$, dan nilai cotan β=3 tidak terdefinisi. Tentukanlah :

a. $\sin \beta$

b $\cos \beta$

c. $\dfrac{\sin \beta}{\tan \beta + 1}$

d. $\dfrac{2\sec \beta}{\tan \beta - 1}$

7. Sederhanakanlah bentuk persamaan berikut ini.

a. $\cos x.\operatorname{cosec} x.\tan x$

b. $\cos x.\operatorname{cotan} x + \sin x$

8. Diketahui β berada di kuadran III, dan $\cos \beta = -\dfrac{\sqrt{3}}{4}$, tentukanlah:

a. $\dfrac{\sec \beta - \tan^2 \beta}{\tan \beta} + \sec \beta$

b. $\dfrac{\sec^2 \beta + \tan^2 \beta}{2\sin^2 \beta + 2\cos^2 \beta}$

9. Sederhanakanlah bentuk ekspresi berikut.

a. $\dfrac{\sin A}{1+\cos A} + \dfrac{\sin A}{1-\cos A}$

b. $(\sin B + \cos B)^2 + (\sin B - \cos B)^2$

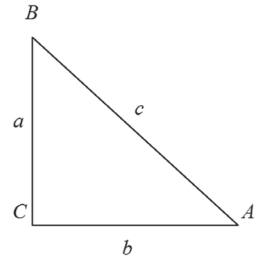
c. $(\operatorname{cosec} A - \operatorname{cotan} A).(1 + \cos A)$

10. Jika diketahui $Y_1 = a \sin bx$, dan $Y_2 = a \cos bx$, $x \in [0°,360°]$, a, $b \in R$. Tentukanlah nilai maksimum dan minimum kedua fungsi, dan gambarkanlah gambar kedua fungsi.

Projek

Himpunlah informasi penerapan grafika fungsi trigonometri dalam bidang fisika dan teknik elektro serta permasalahan di sekitarmu. Buatlah analisis sifat-sifat grafik sinus, cosinus, dan tangen dalam permasalahan tersebut. Buatlah laporanmu dan sajikan di depan kelas.

D. PENUTUP

1. Pada segitiga siku-siku ABC berlaku jumlah kuadrat sisi siku-siku sama dengan kuadrat sisi hypothenusanya atau secara simbolik ditulis $a^2 + b^2 = c^2$ dengan c merupakan panjang sisi miring dan a serta b panjang sisi-sisi yang lain dari segitiga siku-siku tersebut.
2. Pada gambar segitiga siku-siku ABC dengan sudut siku-siku berada di C, maka berlaku perbandingan trigonometri berikut.
   a. $\sin A = \dfrac{a}{c}$
   b. $\cos A = \dfrac{b}{c}$
   c. $\tan A = \dfrac{a}{b}$
3. Nilai perbandingan trigonometri pada tiap kuadran berlaku sebagai berikut.
   a. Pada kuadran I, semua nilai perbandingan trigonometri bernilai positif, termasuk kebalikan setiap perbandingan sudut tersebut.
   b. Pada kuadran II, hanya sin α dan cosec α yang bernilai positif, selainnya bertanda negatif.
   c. Pada kuadran III, hanya tan α dan cotan α yang bernilai positif, selainnya bertanda negatif.
   d. Pada kuadran IV, hanya cos α dan sec α yang bernilai positif, selainnya bertanda negatif.
4. Nilai perbandingan trigonometri pada kuadran I adalah sebagai berikut.

Sudut	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	tidak terdefinisi